УДК 004.942

СОКРАЩЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ УРАВНЕНИЙ В МЕТОДЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

REDUCTION OF THE DIMENSION OF EQUATIONS IN THE METHOD OF HARMONIOUS BALANCE

И.А. НИКИТОВ – магистрант, Институт информационных технологий и радиоэлектроники, кафедра ВТиСУ, группа ВТм-118, E-mail: ioprst0904@gmail.com

В.Н. ЛАНЦОВ – научный руководитель, д.т.н., профессор, Институт информационных технологий и радиоэлектроники, заведующий кафедрой ВТиСУ, E-mail: lantsov@vlsu.ru

I.A. NIKITOV – undergraduate, Vladimir state university, E-mail: ioprst0904@gmail.com

V.N. LANTSOV – doctor of technical sciences, Vladimir state university, E-mail: lantsov@vlsu.ru

Аннотация: В статье описывается новый метод решения уравнений гармонического баланса с использованием алгоритмов MOR, который позволяет сократить размерность решаемых уравнений, что приводит к сокращению вычислительных затрат. Идея метода заключается в замене вектора переменных двумя матрицами сокращенной размерности и последовательном решении новых систем уравнения.

Abstracts: The article describes a new method for solving harmonic balance equations using MOR algorithms, which reduces the dimension of the equations being solved, which leads to a reduction in computational costs. The idea of the method is to replace the vector of variables with two matrices of reduced dimension and sequentially solve new systems of equations.

Ключевые слова: гармонический баланс, методы понижения порядка, нелинейная схема.
Keywords: harmonic balance, order-reduction methods, nonlinear scheme.

Метод гармонического баланса (ГБ) является одним из основных методов для анализа нелинейных схем в частотной области [1].

Основными проблемами метода являются значительные требования к памяти и большие вычислительные затраты при моделировании сложных систем, содержащих тысячи электронных компонентов [2]. Например, для схем, содержащих порядка 10 тысяч узлов и при учете порядка 1 тысячи гармоник (при многочастотном воздействии), число переменных (неизвестных) модели будет равно примерно 10 миллионам. При решении уравнений ГБ методом Ньютона для хранения Якобиана будет необходим квадрат от этого числа переменных. Поэтому необходимы новые, более экономичные, методы для хранения и решения уравнений модели.

Методы понижения порядка (MOR), получившие популярность в последние годы, позволяют значительно сократить размерность и требуемую память для моделей электронных схем.

Пусть нелинейное устройство (НУ) описывается системой нелинейных интеграло-дифференциальных уравнений

$$f(v(t),t) = i(v(t)) + \frac{dq(v(t))}{dt} + \int_{-\infty}^{t} y(t-\tau)v(\tau)d\tau + i_E(t) = 0, \qquad (1)$$

где $v(t)$ – вектор узловых напряжений размерностью N; $i(v(t))$ – вектор тока нелинейных элементов; $q(v(t))$ – заряд конденсаторов; $u(t)$ – токи входных источников; $y(t)$ – импульсная характеристика линейной части схемы; i и q представляют только нелинейные элементы [1].

В методе ГБ предполагается, что v и f в (1) представляются в виде ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{j\omega_k t}, \tag{2}$$

где $\omega_k = k\lambda$ и $\lambda = 2\pi / T$ является базовой частотой.

Тогда уравнение (1) преобразуется в систему нелинейных уравнений, которое можно переписать в виде

$$F(V,k) = I(V,k) + j\omega_k Q(V,k) + Y(k)V(k) + I_E(k) = 0. \tag{3}$$

В векторной форме (3) будет иметь вид

$$F(V) = I(V) + \Omega Q(V) + YV + I_E = 0, \tag{4}$$

где $F(V)$, $I(V)$, $Q(V)$, V, I_E – векторы размерностью $(2K+1)\times N$, содержащие спектр в каждом узле схемы. Матрица Y – блочная матрица, Ω – блочно-диагональная матрица, в которой $\Omega_{nn} = diag\left\{-j\omega_K, ..., 0, ..., j\omega_K\right\}$, K – число учитываемых гармоник [1].

Решение уравнений (4) в частотной области чаще всего выполняется итерационным методом Ньютона

$$J(V^j)\Delta V^{j+1} = -F(V^j), \tag{5}$$

где $J(V^j) = \frac{\partial F}{\partial V}|_{v^j}$ – матрица Якоби размерностью $((2K+1)\times N)\times((2K+1)\times N)$, $\Delta V^{j+1} = (V^{j+1} - V^j)$ – приращение .

Для сложных многокомпонентных систем Якобиан становится слишком большим, что приводит к большим затратам памяти и вычислений.

Методы понижения порядка моделей основаны на замене исходных переменных модели $v(t)$ на новую переменную $v^r(t)$, связанные соотношением $v(t) = P \times v^r(t)$, где P – вектор (матрица) преобразований [3]. Получение вектора преобразований P может быть выполнено одним из трех методов: метод согласования моментов, метод ограниченной балансной реализации, метод разложения на основе сингулярных значений.

В работе [4] был предложен метод использования алгоритмов MOR для решения уравнений ГБ. Решение выполнялось методом Ньютона с использованием метода продолжения по параметру. Метод продолжения по параметру в настоящее время практически не используется, так как увеличивает вычислительные затраты, кроме того, для сокращения размерностей в данной постановке задачи может быть применен только метод согласования моментов, который требует больше всего вычислительных затрат из выше приведенных трех. Поэтому выигрыш метода по времени вычислений получился незначительным.

Предлагается новый метод и алгоритм сокращения вычислительных затрат (памяти и времени расчета) для задач ГБ. Упростим уравнение (4) в виде

$$F(V) = I(V) + YV - I_E = 0. \qquad (5)$$

Идея метода заключается в замене вектора переменных V на две матрицы сокращенной размерности

$$V = V_H \times V_N, \tag{6}$$

где матрица V_H сокращает число гармоник и имеет размерность $N \times R$, V_N сокращает число узлов схемы и имеет размерность $R \times (2K+1)$, R – сокращенная размерность уравнений, $R << N$, $R << (2K+1)$. На рис. 1 условно представлено преобразование вектора V в две новые матрицы сокращенной размерности.

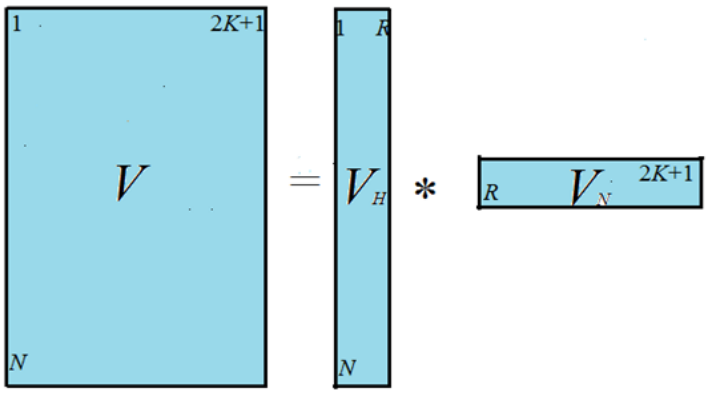

Рисунок 1 – Замена матрицы V на две новые матрицы сокращенной размерности

Сокращение памяти и вычислительных затрат будет определяться меньшей размерностью новых матриц и тем, что они используются последовательно.

Умножив (5) на матрицу V_N^T, что сократит размерность уравнений до величины $N \times R$, сокращается число учитываемых гармоник в уравнениях.

$$F(V) = I(V) \cdot V_N^T + YV \cdot V_N^T - I_E \cdot V_N^T = 0 \tag{7}$$

Заменив в (7) матрицу V на (6), получим

$$F(V_H V_N) = I(V_H V_N) \cdot V_N^T + Y V_H V_N V_N^T - I_E \cdot V_N^T = 0 . \qquad (8)$$

Если для матрицы V_N применить операцию ортонормирования, то $V_N V_N^T = I$ (I – единичная матрица). В этом случае получим уравнение

$$F(V_H) = I(V_H V_N) \cdot V_N^T + Y V_H - I_E \cdot V_N^T = 0 . \qquad (9)$$

Уравнение (9) является базовым для нахождения V_H при известном (заданном) значении матрицы V_N.

Аналогично можно получить уравнения для нахождения V_N. Если умножить (5) на матрицу V_H^T, что сократит размерность уравнений до величины $R \times (2K+1)$, сокращается число узлов в уравнениях баланса.

$$F(V) = I(V) \cdot V_H^T + Y V \cdot V_H^T - I_E \cdot V_H^T = 0 \qquad (10)$$

Заменив в (10) матрицу V на (6), получим

$$F(V_H V_N) = I(V_H V_N) \cdot V_H^T + Y V_N V_H V_H^T - I_E \cdot V_H^T = 0 , \qquad (11)$$

или, если $V_H V_H^T = I$, получим уравнение для нахождения V_N при известном значении матрицы V_H

$$F(V_N) = I(V_H V_N) \cdot V_H^T + Y V_N - I_E \cdot V_H^T = 0 . \qquad (12)$$

Уравнения (9) и (12) решаются методом простой итерации. Итерации получаются путем переноса части слагаемых в правую часть уравнений. V_H определяется следующей итерационной формулой (системой линейных алгебраических уравнений)

$$Y \cdot V_H^{i+1} = I_E V_N^T - I(V_H^i V_N) V_N^T , \tag{13}$$

где i – номера итерации, первое слагаемое является постоянной величиной и может быть вычислено до начала итераций.

Аналогично решение (12) находится путем итераций и решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Y \cdot V_N^{i+1} = I_E V_H^T - I(V_H V_N^i) V_H^T . \tag{14}$$

Дальнейшие исследования связаны с вычислением производных для уравнений (9) и (12), используемых для расчета Якобиана и применения итерационного метода Ньютона, скорость сходимости которого намного выше, чем у метода простой итерации.

Список используемой литературы:

1. Ланцов В.Н. Состояние в области методов моделирования нелинейных ВЧ электронных устройств связи (обзор). Часть 1 / В.Н. Ланцов // Проектирование и технология электромагнитных средств. – 2012. – № 4. – С. 2–11.

2. Ланцов В.Н. Состояние в области методов моделирования нелинейных ВЧ электронных устройств связи (обзор). Часть 2 / В.Н. Ланцов //

Проектирование и технология электромагнитных средств. – 2013. – № 1. – С. 16–23.
3. Долинина А.А. Алгоритм моделирования нелинейных устройств на основе методов понижения порядка моделей и кусочно-линейной аппроксимации / А.А. Долинина, В.Н. Ланцов // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. – 2014. – № 4. – С. 28–33.
4. Gad E. A circuit reduction technique for finding the steady-state solution of nonlinear circuits / E. Gad, R. Khazaka, M.S. Nakhla, R. Griffith // IEEE Trans. Microwave Theory & Technique. – 2000. – № 12. – С. 2389–2396.